PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA (PROVA 435)

(1ª FASE — 1ª CHAMADA)

Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	B	B	C	B	D	B	A
Versão 2	C	C	B	A	C	D	D

Grupo II

(Proposta de Resolução)

1.1. $z_1 = \sqrt{2}\,\text{cis}\ \pi/4$ dado que $|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e $\text{Arg}\ z_1 = \pi/4$, uma vez que $\text{Re}\ z_1 = \text{Im}\ z_1$ e ambos os números são positivos.

$$z_1^4 = (\sqrt{2})^4 \text{cis}\ \frac{4\pi}{4} = 4\text{cis}\ \pi = -4$$

$$z_2^4 = (\sqrt{2})^4 \text{cis}\ \left(4 \times \frac{3\pi}{4}\right) = 4\text{cis}\ (3\pi) = 4\text{cis}\ \pi = -4$$

Portanto, z_1 e z_2 são raízes quartas de -4.

1.2. Os comprimentos dos lados $[OA]$ e $[OB]$ medem $\sqrt{2}$, atendendo ao valor de $|z_1|$ e $|z_2|$.

Como $\text{Arg}\ (z_2) - \text{Arg}\ (z_1) = \pi/2$, conclui-se que o triângulo $[AOB]$ é rectângulo em O.

Donde $\overline{AB} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2$.

O perímetro do triângulo $[AOB]$ é, pois, $2 + 2\sqrt{2}$.

2.1.

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = \\ = [1 - P(A)] - P(B) + P(A \cap B) = P(\overline{A}) - P(B) + P(A|B) \times P(B) \end{aligned}$$

c.q.d.

2.2.1. Sejam A e B os acontecimentos, respectivamente, *ter olhos verdes* e *ter cabelo louro*.

A probabilidade pedida é dada por $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

De acordo com o enunciado,

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad P(A|B) = \frac{1}{2}.$$

Pela alínea anterior,

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

2.2.2. Número de raparigas com cabelos louros: $1/3 \times 120 = 40$.

Cada comissão tem exactamente 2 raparigas louras e 3 raparigas não louras.

Número de comissões: ${}^{40}C_2 \times {}^{80}C_3 = 64084800$.

3.1.1. Dado que 15 minutos correspondem a um quarto de hora, basta calcular

$$A(0,25) = 4 \times 0.25^3 \times e^{-0,25}$$

O valor da concentração do antibiótico, em miligramas por litro de sangue, com a aproximação pedida é $0,05$.

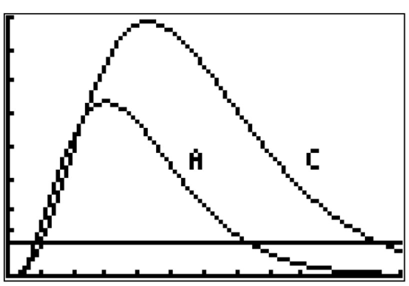
3.1.2. $A(t) = C(t) \Leftrightarrow 4t^3 e^{-t} = 2t^3 e^{-0,7t} \Leftrightarrow t = 0 \vee 2e^{-t} = e^{-0,7t}$.

Dado que $t > 0$, vem

$$\frac{e^{-0,7t}}{e^{-t}} = 2 \Leftrightarrow e^{0,3t} = 2 \Leftrightarrow 0,3t = \ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{0,3} \approx 2,31.$$

As concentrações voltam a ser iguais 2 horas e 19 minutos após a administração do medicamento.

3.2. Na calculadora foram inseridas as funções dadas e a função constante $y = 1$.



Analisando os gráficos na janela de visualização $[0,12] \times [0,8]$, verifica-se que o máximo da função A corresponde ao ponto (4,3;7,8); isto permite concluir que apenas o Carlos corre riscos de sofrer efeitos secundários indesejáveis, uma vez que a concentração máxima do medicamento no sangue excede em 3 décimos de miligrama por litro o limiar fixado.

Além disso, os gráficos das funções A e C intersectam a recta $y = 1$ nos pontos de abcissa $7,4$ e $11,4$, respectivamente; constata-se, por isso, que a Ana deve tomar nova dose de medicamento 7 horas e 24 minutos após a ingestão da dose anterior enquanto que o Carlos só o deverá fazer 4 horas depois da Ana o ter feito.

4.1.

$$\overline{AE} = 1 - \overline{BE} = 1 - \frac{\overline{BC}}{\text{tg } x} = 1 - \frac{1}{\text{tg } x}$$

$$\overline{CE} = \frac{\overline{BC}}{\text{sen } x} = \frac{1}{\text{sen } x}.$$

$$f(x) = 2(\overline{AE} + \overline{CE}) = 2\left(1 - \frac{1}{\text{tg } x} + \frac{1}{\text{sen } x}\right) = 2 - \frac{2}{\text{tg } x} + \frac{2}{\text{sen } x}$$

4.2. Dado que $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \text{tg } x = +\infty$ e $\lim_{x \to (\pi/2)^-} \text{sen } x = 1$, então

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 2 - 0 + 2 = 4.$$

Interpretação geométrica: quando x se aproxima de $\pi/2$, por valores inferiores, os pontos E e F tendem para B e D, respectivamente; logo, o perímetro do quadrilátero $[CEAF]$ tende para o perímetro do quadrado $[ABCD]$, que é igual a 4.

4.3.

$$f'(a) = -\frac{-2 \times (1/\cos^2 x)}{\text{tg}^2 x} - \frac{2\cos x}{\text{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{2}{\cos^2 x \, \text{tg}^2 x} - \frac{2\cos x}{\text{sen}^2 x} = \frac{2}{\text{sen}^2 x} - \frac{2\cos x}{\text{sen}^2 x} = \frac{2 - 2\cos x}{\text{sen}^2 x}$$

No intervalo $I =]\pi/4, \pi/2[$, $\cos x \in]0,1[$, donde $2 - 2\cos x$ toma valores em $]0,2[$, logo positivos; por outro lado, $\text{sen}^2 x > 0$, para qualquer $x \in I$.

Conclui-se que $f'(x) > 0$, para qualquer $x \in I$ e, portanto, f é crescente em I.