

# PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

2ª Fase—2002

## Grupo I

Questões	1	2	3	4	5	6	7
Versão 1	C	B	A	A	C	D	B
Versão 2	A	C	B	C	D	C	D

## Grupo II

(Proposta de resolução)

1.1. Aplicando a noção de raiz de um polinómio:

$$(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0 \Leftrightarrow 2i + b + bi + c = 0 \Leftrightarrow (2+b)i + (b+c) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2+b = 0 \wedge b+c = 0 \Leftrightarrow b = -2 \wedge c = 2$$

1.2.  $z_1 = \sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{4}$   
 $\bar{z}_2 = \text{cis}(-\alpha)$

$z_1 \times \bar{z}_2 = \sqrt{2}\text{cis}(\pi/4 - \alpha)$  é um número real negativo se e só se  $(\pi/4) - \alpha = \pi + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .  
Assim,

$$\alpha = -\frac{3\pi}{4} - 2k\pi$$

e, para pertencer ao intervalo dado,  $k$  apenas pode tomar o valor  $-1$ ; donde  $\alpha = 5\pi/4$ .

2.1.1. O gráfico da função  $f$  não admite assíntotas verticais, pois  $f$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}$ .

Para estudar a existência de assíntotas horizontais há que calcular o limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3} + 2e^{1-x} \right) = \frac{1}{3} + 2 \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1-x}.$$

Quando  $x$  tende para  $+\infty$ ,  $1-x$  tende para  $-\infty$  e  $e^{1-x}$  para 0; logo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{3}.$$

Portanto, o gráfico de  $f$  admite uma assíntota horizontal de equação  $y = 1/3$ .

Quando  $x$  tende para  $-\infty$ ,  $1 - x$  tende para  $+\infty$  e  $e^{1-x}$  para  $+\infty$ .

Logo  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ , pelo que se conclui que a única assíntota horizontal tem equação  $y = 1/3$ .

2.1.2.  $g(\pi) = 1$ .

$$\begin{aligned} f(x) = g(\pi) &\Leftrightarrow \frac{1}{3} + 2e^{1-x} = 1 \Leftrightarrow e^{1-x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 1 - x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 1 - \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \ln e - \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{e}{1/3}\right) \Leftrightarrow x = \ln(3e) \end{aligned}$$

2.2.  $f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0$ . Consultando a tabela da função  $f(x) - g(x)$  para os valores inteiros de  $x$  de 0 a 6, verifica-se que apenas para 2 e 3 se obtêm imagens negativas, sendo as restantes positivas.

Assim, o conjunto das soluções inteiras da inequação dada no intervalo fixado é  $\{0, 1, 4, 5, 6\}$ .

3.1. Área da base:  $A_b = x^2$

Volume:  $V = A_b \times h$  ( $h$  representa a altura da embalagem)

Donde,  $2 = x^2 \times h \Leftrightarrow h = 2/x^2$ .

Área da face lateral:  $A_l = x \times h = 2/x$ ,

Área total:  $A = 2A_b + 4A_l$ .

Portanto,

$$A(x) = 2x^2 + 4 \cdot \frac{2}{x} = \frac{2x^3 + 8}{x},$$

como se pretendia mostrar.

3.2.  $A'(x) = 4x - 8/x^2 = (4x^3 - 8)/x^2$ . Atendendo a que  $x > 0$ ,

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}.$$

Sendo  $x^2 > 0$ , o sinal de  $A'(x)$  coincide com o sinal de  $4x^3 - 8$ .

$x$	0		$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
$A'(x)$		-	0	+
$A(x)$	nd	$\searrow$	m	$\nearrow$

(nd = não definida)

O valor de  $x$  para o qual a área total da embalagem é mínima é  $\sqrt[3]{2}$ .

4. O facto da função  $f$  ter derivada finita em todos os pontos do domínio, que é  $\mathbb{R}$ , e ser crescente permite concluir que  $f'(x) \geq 0$ , em  $\mathbb{R}$ .

Os declives de  $r$  e  $s$  são iguais a  $f'(a)$  e  $f'(b)$ , respectivamente, logo são números não negativos.

Portanto,  $f'(a) \times f'(b) \geq 0$  o que contraria a condição de perpendicularidade:  $f'(a) \times f'(b) = -1$ .

5.1. O número de casos possíveis é o número de extracções de 6 cartas quaisquer de um baralho completo:  ${}^{52}C_6$ .

O número de casos favoráveis é dado por  ${}^4C_1 \times {}^{48}C_5$ , atendendo a que se pretende extrair um só Rei dos quatro existentes no baralho e cinco outras cartas quaisquer.

A probabilidade pedida é dada por

$$\frac{{}^4C_1 \times {}^{48}C_5}{{}^{52}C_6}.$$

Com a aproximação pedida, o resultado é igual a 0.336.

5.2. A probabilidade pedida pode enunciar-se da forma seguinte: probabilidade de sair uma figura de copas na segunda extracção, sabendo que saiu uma carta de espadas na primeira extracção.

Depois de efectuada a primeira extracção restam 51 cartas no baralho, entre as quais estão as três figuras de copas (Rei, Dama, Valete).

Assim sendo, trata-se de determinar a probabilidade de um acontecimento com três casos favoráveis e 51 casos possíveis. Pela regra de Laplace, a probabilidade é igual a  $3/51$ , ou seja  $1/17$ .