

Proposta de Resolução do Exame de Matemática B
Cod. 735 – 1ª Fase 2009

GRUPO I

1. $C(2, -2)$, logo as coordenadas do ponto simétrico de C relativamente a Ox são $(2, 2)$.

2. A área do quadrilátero $[ABCD]$ é a soma das áreas dos triângulos $[ABD]$ e $[BCD]$.

$$A_{[ABD]} = \frac{3 \times 6}{2} = 9$$

$$A_{[BCD]} = \frac{3 \times 2}{2} = 3$$

$$A_{[ABCD]} = 9 + 3 = 12$$

A área total do *Stomachion* é $12^2=144$

Logo, o quociente entre as duas áreas é

$$\frac{12}{144} = \frac{1}{12}$$

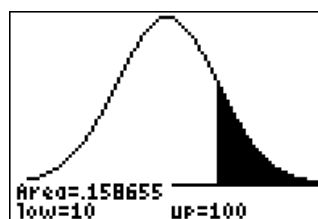
que é um número racional por ser uma razão de números inteiros.

GRUPO II

1. Numa distribuição normal, a probabilidade de um valor se situar no intervalo $]\mu-\sigma, \mu+\sigma[$ neste caso $]6, 10[$, é de 0,6827. Como a normal é uma distribuição simétrica relativamente à média, tem-se

$$P(X > 10) = \frac{1 - P(6 < X < 10)}{2}$$

$$= \frac{1 - 0,6827}{2}$$



$$= 0,15865 \approx 16\%$$

A probabilidade pedida é aproximadamente 16%.

2. $x = 100$

$$y = 0,0290 \times 100 + 18,36 = 2,9 + 18,36 = 21,26$$

A temperatura correspondente a uma profundidade de 100 metros é de cerca de 21,26°.

3.1.

$$TVM_{[0,3]} = \frac{h(3) - h(0)}{3}$$

$$TVM_{[0,3]} = \frac{32,775 - 94,8}{3}$$

$$TVM_{[0,3]} = -20,675 \approx -20,7 \text{ m/s}$$

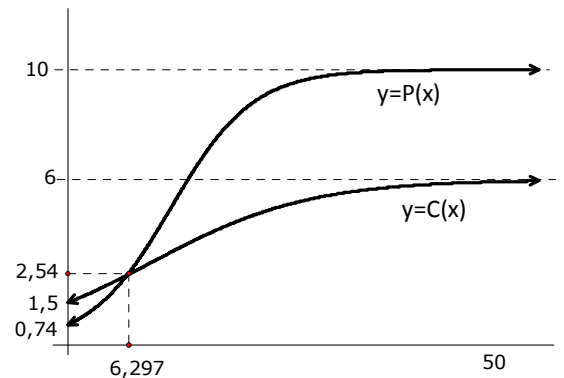
3.2. A taxa de variação instantânea é negativa antes do instante $t = 5,4$ e positiva depois. Isso significa que h , a distância da águia ao fundo do vale, é decrescente antes desse instante e crescente depois. Por isso, $t = 5,4$ corresponde ao mínimo da função h , ou seja, ao instante da captura, que se deu a uma distância $h \approx 0,7$ m.

4. Considerem-se os seguintes factos, e os gráficos que se podem visualizar na calculadora:

I. $C(0) - P(0) \approx 1,54 - 0,74 \approx 0,80$

II. O ponto de intersecção dos dois gráficos tem coordenadas aproximadas $(6,3; 2,5)$.

III. As duas funções dadas são modelos logísticos, logo ambas admitem assíntotas horizontais quando x tende para $+\infty$, respectivamente $y = 10$ e $y = 6$ (parâmetros que figuram nos numeradores das fracções).



Assim, podemos concluir que as afirmações I e II estão incorrectas porque a diferença entre as alturas no momento em que as árvores foram plantadas ($x = 0$) é de cerca de 0,8 metros, ou seja 80 centímetros; ao fim de pouco mais de seis anos as árvores atingem a mesma altura de cerca de 2,5 m e ao fim de 7 anos a altura das árvores da espécie P é nitidamente maior do que a das árvores da espécie C.

A afirmação III está correcta, uma vez que com o passar dos anos a altura das árvores da espécie P tende a estabilizar em cerca de 10 metros, enquanto a das árvores da espécie C tende a estabilizar em cerca de 6 metros.

GRUPO III

O lucro semanal é dado por $L(x, y) = 1600x + 1200y$ (função objectivo).

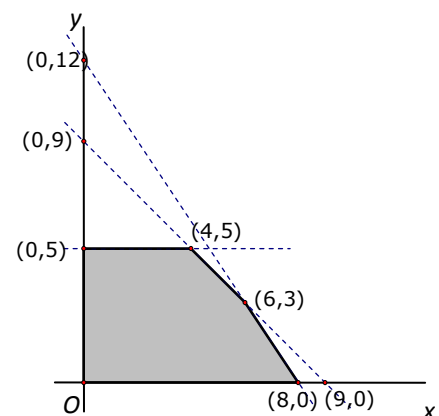
$$\text{Restrições do problema} \begin{cases} 3x + 2y \leq 24 \\ 5x + 5y \leq 45 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

$$L(0,5) = 1200 \times 5 = 6000$$

$$L(4,5) = 1600 \times 4 + 1200 \times 5 = 12400$$

$$L(6,3) = 1600 \times 6 + 1200 \times 3 = 13200$$

$$L(8,0) = 1600 \times 8 = 12800$$



O lucro máximo é de 13200 euros e corresponde a uma produção semanal de 6 toneladas de *PPremium* e 3 toneladas de *PRegular*.

Grupo IV

1. Os valores correspondentes aos primeiros oito cravos da ferradura da pata dianteira esquerda estão em progressão geométrica em que o primeiro termo é 0,01€ e a razão é 2. Assim usando fórmula da soma dos oito primeiros termos da progressão tem-se que:

$$S_8 = 0,01 \times \frac{1-2^8}{1-2} \Leftrightarrow S_8 = 2,55$$

Ou seja, 2,55€.

2. Considerando o modo como o valor correspondente aos 32 cravos evolui, temos novamente uma progressão geométrica em que primeiro termo é 0,01€ e a razão é 2. Assim, o valor é dado por:

$$S_{32} = 0,01 \times \frac{1-2^{32}}{1-2} \Leftrightarrow S_{32} \approx 42949672$$

Valor que é superior a 4000000€.

Grupo V

- 1.

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\overline{AC}}{BC} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{R}{R+h} \Leftrightarrow R \cos \alpha + h \cos \alpha = R \Leftrightarrow R \cos \alpha - R = -h \cos \alpha \\ &\Leftrightarrow R(\cos \alpha - 1) = -h \cos \alpha \Leftrightarrow R = \frac{h \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}. \end{aligned}$$

- 2.

$$R = \frac{2,35 \times \cos 1^\circ,5564}{1 - \cos 1^\circ,5564} \Leftrightarrow R \approx 6367$$

A diferença entre o valor obtido pelo Rodrigo e o obtido pelo método de Eratóstenes é: 6367-6316= 51 km.



PRIMEIRO COMENTÁRIO SOBRE A PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA B

(Código 735/ 23 de Junho de 2009)

1º FASE

A prova está em conformidade com as informações sobre o exame previamente publicadas pelo GAVE.

Apresenta cinco conjuntos de itens e, de acordo com o tema central do programa “Aplicações e Modelação Matemática”, os itens são de modelação e aparecem contextualizados em situações realistas.

A calculadora gráfica revela-se um instrumento necessário para encontrar respostas às questões postas no enunciado da prova.

Os itens distribuem-se pela Geometria, Modelos de Probabilidade, Movimentos periódicos, Movimentos não lineares, Modelos discretos e Problemas de Optimização, respeitando a distribuição da valorização estipulada nas informações para exame.

Consideramos as questões do teste, de um modo geral, interessantes e bem elaboradas, porque, embora acessíveis, só podem ser resolvidas por quem domina os conceitos.

Consideramos o tempo previsto para a sua realização adequado, permitindo uma resolução cuidadosa de cada uma das questões, embora alguns estudantes a tivessem considerado um pouco longa.